سیگنال‌ها و سیستم‌ها	نیمسال اول ۹۷-۱۳۹۶	تستی: ۲۵ تشریحی: ۵
رشته تحصیلی: مهندسی کامپیوتر، مهندسی مدیریت اجرایی، مهندسی پزشکی، مهندسی برق، مهندسی رباتیک		

۱- توان متوسط در سیگنالهایی با انرژی محدود برابر با کدامیک از گزینه های زیر است ؟

۱. $\frac{1}{T}$ ۲. بینهایت ۳. صفر ۴. $\frac{1}{2T}$

۲- کدام گزینه در مورد سیگنال $e^{jw_0 n}$ صحیح می باشد ؟

۱. به ازای مقادیر متمایز w_0 سیگنالهای متمایزی هستند. $e^{jw_0 t}$

۲. به ازای فرکانسهایی که اختلافشان 2π است سیگنالهای مشابهی هستند. $e^{jw_0 n}$

۳. به ازای تمام مقادیر w_0 متناوب است

۴. فرکانس پایه w_0 است

$e^{jw_0 n}$ $m, n > 0$ $\frac{w_0}{2\pi} = \frac{m}{n}$ $\frac{w_0}{m}$

۳- کدامیک از سیستمهای زیر حافظه دار می باشد ؟

۱. $y(t) = \frac{1}{c}\int_0^t x(\tau)d\tau$ ۲. $y(t) = COS(t+1)x(t)$

۳. $y(t) = tx(t)$ ۴. $y[n] = (2x[n] - x[n]^2)^2$

۴- کدامیک از سیستمهای زیر غیرعلی است ؟

۱. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ است

۲. $y[n] = [n-1]$ است

۳. $y[n] = x[-n], n > 0$ است

۴. $y[n] = x[n] - x[n+1]$ نیست

۵- ورودی یک سیستم LTI، $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ و پاسخ ضرب $h(t) = u(t)$ می باشد. خروجی $y(t)$ برابر با کدامیک از گزینه های زیر می باشد ؟

۱. $y(t) = \alpha(1 - e^{-\alpha t})u(t)$

۲. $y(t) = \alpha(1 - e^{\alpha t})u(t)$

۳. $y(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})u(t)$

۴. $y(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{\alpha t})u(t)$

۶- پاسخ ضربه کدام یک از سیستمهای زیر مربوط به یک سیستم علی و پایدار می باشد ؟

۱. $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$

۲. $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$

۳. $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

۴. $h[n] = (0.8)^n u[n-2]$

۷- کدامیک از گزینه های زیر در مورد ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی و زوج صحیح می باشد؟

۱. ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی و زوج، حقیقی و زوج می باشد

۲. ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی و زوج، موهومی و زوج می باشد

۳. ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی و زوج، موهومی و فرد می باشد

۴. ضرایب سری فوریه یک سیگنال حقیقی و زوج، حقیقی و فرد می باشد

۸- اگر ضرایب سری فوریه سیگنال x(t)، a_k باشد ضرایب سری فوریه سیگنال x(-t) کدامیک از گزینه های زیر می باشد؟

۱. a_k^* ۲. a_{-k}^* ۳. a_{-k} ۴. a_k

۹- با فرض اینکه ضرایب سری فوریه سیگنال X(t) با دوره تناوب T، a_k باشد کدامیک از گزینه های زیر در مورد سیگنال x(at) با ضرایب سری فوریه b_k صحیح می باشد؟

۱. $b_k = a_k$ ۲. $b_k = Ta_k$ ۳. $b_k = \frac{a_k}{T}$ ۴. $b_k = \frac{a_k}{a}$

۱۰- کدامیک از گزینه های زیر در مورد نمایش سری فوریه سیگنال گسسته در زمان صحیح می باشد؟

۱. سری فوریه سیگنال گسسته در زمان پیوسته است

۲. سری فوریه سیگنال گسسته در زمان متناهی است

۳. سری فوریه سیگنال گسسته در زمان متناوب است

۴. سری فوریه سیگنال گسسته در زمان نامتناوب است

نمایش سری فوریه سیگنال متناوب گسسته در زمان یک سری متناهی است

نمایش سری فوریه سیگنال گسسته در زمان نامتناوب یک سری نامتناهی است

۱- با توجه به اینکه تبدیل فوریه سیگنال $e^{-|t|}$ برابر با $\frac{1}{1+w^2}$ می باشد، تبدیل فوریه سیگنال $te^{-|t|}$ برابر با کدامیک از گزینه های زیر میباشد؟

۱. $\frac{w}{(1+w^2)^2}$ ۲. $\frac{w}{1+w^2}$ ۳. $\frac{-4jw}{(1+w^2)}$ ۴. $\frac{-4jw}{(1+w^2)^2}$

- اگر $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$ باشد، کدامیک از گزینه های زیر در مورد تبدیل فوریه سیگنال $x(t-t_0)$ صحیح میباشد؟

۱

با دادن جابجایی به یک سیگنال بر تبدیل فوریه آن دامنه تبدیل فوریه تغییر نمی کند و فاز آن تغییر می کند.

۱. $e^{jwt_0}X(jw)$ ۲. $e^{-jwt_0}X(jw)$

۳. $e^{-jwt_0}X(j(w-w_0))$ ۴. $e^{jwt_0}X(j(w-w_0))$

گر $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$ باشد، کدامیک از گزینه های زیر در مورد تبدیل فوریه سیگنال x(at) صحیح می باشد؟

۱. $|a|X\left(\frac{jw}{a}\right)$ ۲. $\frac{1}{|a|}X\left(\frac{jw}{a}\right)$ ۳. $\frac{1}{|a|}X(jwa)$ ۴. $|a|X(jwa)$

سیگنال‌ها و سیستم‌ها	نیمسال اول ۹۷-۱۳۹۶	تستی: ۲۵ تشریحی: ۵

رشته تحصیلی: مهندسی کامپیوتر، مهندسی مدیریت اجرایی، مهندسی پزشکی، مهندسی برق، مهندسی رباتیک

۱۴- تبدیل فوریه سیگنال $x_1(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$ کدامیک از گزینه های زیر می باشد ؟

۱. $-w^2e^{-j2w}X(jw)$ ۲. $w^2e^{-j2w}X(jw)$ ۳. $w^2e^{-jw}X(jw)$ ۴. $-w^2e^{-jw}X(jw)$

۱۵- کدامیک از گزینه های زیر در مورد تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان صحیح می باشد ؟

۱. تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان یک سیگنال گسسته است

۲. تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان یک سیگنال پیوسته است

۳. تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان نامتناوب است

۴. تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان حقیقی است

۱۶- تبدیل فوریه سیگنال $x_1[n] = x[1-n] + x[-1-n]$ برابر با کدامیک از گزینه های زیر است ؟

۱. $(2cosw)X(e^{-jw})$ ۲. $(2sinw)X(e^{-jw})$

۳. $(2sinw)X(e^{+jw})$ ۴. $(2cosw)X(e^{+jw})$

۱۷- پاسخ ضربه سیستم LTI توصیف شده با معادله $y[n] - ay[n-1] = x[n]$ برابر با کدامیک از گزینه های زیر میباشد ؟

۱. $h[n] = a^nu[n]$ ۲. $h[n] = a^{-n}u[n]$

۳. $h[n] = a^{-n}u[-n]$ ۴. $h[n] = a^nu[-n]$

۱۸- کدام گزینه در مورد تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$ و ناحیه همگرایی آن صحیح می باشد؟

۱. $\frac{1}{s+a}, Re\{s\} > a$ ۲. $\frac{1}{s+a}, Re\{s\} > -a$

۳. $\frac{1}{s-a}, Re\{s\} > -a$ ۴. $\frac{1}{s-a}, Re\{s\} > a$

۱۹- کدام گزینه در مورد ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(-t)$ صحیح می باشد ؟

۱. $-2 < Re\{s\} < -1$ ۲. $Re\{s\} > -1, Re\{s\} < -2$

۳. $Re\{s\} < 1, Re\{s\} > 1$ ۴. $1 < Re\{s\} < 2$

۲۰- کدام گزینه در مورد ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس غلط است ؟

۱. اگر X(T) عمر محدود داشته باشد (پایدار باشد)، ناحیه همگرایی محدود است

۲. اگر X(T) عمر محدود داشته باشد (پایدرا باشد)، ناحیه همگرایی تمام صفحه S است

۳. اگر X(T)، یک سیگنال به فرم گویا باشد، ناحیه همگرایی هیچ قطبی را شامل نمی شود

۴. ناحیه همگرایی همواره یک ناحیه پیوسته است

۲۱- کدام گزینه در مورد ناحیه همگرایی تبدیل Z سیگنال $x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$ صحیح می باشد ؟

۱. $|Z| > 3, |Z| < 2$

۲. $|Z| < 3, |Z| > 2$

۳. $|Z| < \frac{1}{3}, |Z| > \frac{1}{2}$

۴. $|Z| > \frac{1}{3}, |Z| < \frac{1}{2}$

۲۲- کدام گزینه در مورد ناحیه همگرایی در تبدیل Z صحیح می باشد ؟

۱. ناحیه همگرایی نواری شکل و به موازات محور موهومی می باشد

۲. اگر X[n] دست راستی باشد، آنگاه $|Z|<r$ می باشد

۳. اگر $Z=0$ در ناحیه همگرایی باشد، سیگنال علی است

۴. هیچ قطبی در ناحیه همگرایی قرار نمی گیرد

۲۳- با توجه به ناحیه همگرایی تبدیل Z پاسخ ضربه $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$ ، کدامیک از گزینه های زیر در مورد سیستم صحیح می باشد ؟

۱. سیستم پایدار و علی می باشد

۲. سیستم ناپایدار و علی می باشد

۳. سیستم پایدار و غیرعلی می باشد

۴. سیستم ناپایدار و غیرعلی می باشد

۲۴- پاسخ ضربه سیستم با تابع $H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}$, $|z| > 2$ برابر با کدامیک از گزینه های زیر می باشد؟

۱. $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$

۲. $h[n] = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right] u[-n-1]$

۳. $h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right] u[-n-1]$

۴. $h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right] u[n]$

کدام گزینه در مورد تعیین پایداری سیستم از روی ناحیه همگرایی صحیح می باشد ؟

۱. یک سیستم LTI پایدار است اگر و تنها اگر ناحیه همگرایی تابع سیستم H(z) دایره واحد $|Z|=1$ را شامل شود

۲. یک سیستم LTI پایدار است اگر و تنها تمام قطبهای H(z) داخل دایره واحد باشد

۳. یک سیستم LTI پایدار است اگر و تنها تمام قطبهای H(z) خارج دایره واحد باشد

۴. یک سیستم LTI پایدار است اگر و تنها اگر ناحیه همگرایی تابع سیستم H(z) خارج از دایره واحد $|Z|=1$

سیگنال‌ها و سیستم‌ها	نیمسال اول ۹۷-۱۳۹۶	تستی: ۲۵ تشریحی: ۵

رشته تحصیلی: مهندسی کامپیوتر، مهندسی مدیریت اجرایی، مهندسی پزشکی، مهندسی برق، مهندسی رباتیک

«سؤالات تشریحی»

۱- ضرایب سری فوریه سیگنال $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$ معروف به موج چهارگوش، با دوره تناوب T_0 به دست آورید

۲- با توجه به اینکه $g(t) = \delta(t) \xrightarrow{F} G(jw) = 1$ و با استفاده از خاصیت انتگرال گیری تبدیل فوریه تابع $x(t) = u(t)$ را به دست آورید

۳- یک سیستم LTI با معادله $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$ توصیف شده است پاسخ ضربه ($h[n]$) را به دست آورید

۴- در صورتیکه $Re\{s\} > -1$ ، $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ سیگنال $x(t)$ را به دست آورید

۵- با استفاده از خاصیت مشتق گیری، عکس تبدیل Z سیگنال زیر را به دست آورید

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |z| > |a|$$

سیگنال‌ها و سیستم‌ها	پاسخنامه تشریحی	نیمسال اول ۹۷-۱۳۹۶

۱- «ج» فصل اول، صفحه ۶ و ۷

سیگنال ها را به سه دسته تقسیم می کنیم.

دسته اول سیگنال هایی با انرژی کل محدود هستند، یعنی سیگنال هایی با $E<\infty$. توان متوسط چنین سیگنال هایی صفر است. انرژی محدود توان صفر

دسته ی دوم سیگنال هایی هستند که توان متوسط محدودی دارند، که اگر برای این سیگنال ها $P_\infty > 0$ ضرورتا باید داشته باشیم $E_\infty = \infty$. توان محدود انرژی نامحدود

همچنین سیگنال هایی وجود دارند که هم P_∞ و هم E_∞ آن ها نامحدود است.

۲- «ب» فصل اول، صفحه ۲۸

ویژگی سیگنال های e^{jw_0n}:

- **به ازای فرکانس هایی که اختلافشان 2π است سیگنال های مشابهی اند.**
- تنها هنگامی متناوب است که به ازای مقادیر صحیح m و N بزرگتر از صفر $\frac{w_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$
- فرکانس پایه $\frac{w_0}{m}$
- دوره تناوب پایه $\leftarrow \omega_0=0$: تعریف نشده ، $\omega_0\neq0$: $m(\frac{2\pi}{w_0})$

۳- «الف» فصل اول، صفحه ۴۲

خازن مثالی از سیستم های حافظه دار پیوسته در زمان است، زیرا اگر ورودی آن جریان و خروجی آن ولتاژ در نظر گرفته شود داریم

$$Y(t) = \frac{1}{C}\int_0^t x(\tau)d\tau$$

که در آن C ظرفیت خازن است.

۴- «د» فصل اول، صفحه ۴۴

سیستمی علی است که خروجی آن در هر زمان تنها به مقادیر گذشته و حال ورودی بستگی داشته باشد.

سیستم های زیر علی هستند:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_0^t x(t)dt$$

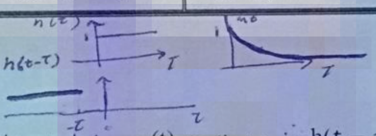
سیستم های زیر علی نیستند:

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$ آینده

$$y(t) = x(t+1)$$ آینده

سیگنال‌ها و سیستم‌ها	پاسخنامه تشریحی	نیمسال اول ۹۷-۱۳۹۶

۵- «ج» فصل دوم، صفحه ۹۱



$x(t)= e^{-\alpha t}u(t)$

$h(t)= u(t)$

به ازای $t< 0$ حاصل ضرب $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$ صفر و در نتیجه (t) هم صفر است. به ازای $t> 0$

$$x(\tau)\, h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & 0<\tau<t \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

از عبارت می توان $y(t)$ در $t> 0$ را به دست آورد:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_0^t = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

$$\mathbf{y(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{1}-\mathbf{e}^{-\boldsymbol{\alpha} \mathbf{t}})\mathbf{u(t)}$$

۶- «د» فصل دوم، صفحه ۳۵

گزینه ۱) علی نیست زیرا برای $n<0$ ، $h[n]\neq0$ ، پایدار است زیرا

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \frac{305}{3} < \infty$$

گزینه ۲) علی است زیرا برای $n<0$ ، $h[n]=0$ ، پایدار نیست زیرا جمله دوم زمانی که $n\to\infty$ نامحدود است.

گزینه ۳) علی است زیرا برای $n>0$ ، $h[n]=0$ ، پایدار نیست زیرا

$$\sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty$$

گزینه ۴) علی است زیرا برای $n<0$ ، $h[n]=0$ ، پایدار است زیرا

$$\sum (0.8)^n = 5 < \infty$$

۷- «الف» فصل سوم، صفحه ۱۸۸

اگر $x(t)$ حقیقی (سیگنال های حقیقی) و زوج باشد، ضرایب سری فوریه نیز حقیقی و زوج اند. به نحوی مشابه می توان نشان داد که اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، ضرایب سری فوریه ی آن موهومی خالص و فردند. پس اگر $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، $a_0= 0$.

۸- «ج» فصل سوم، صفحه ~~۱۸۹~~ ۱۸۷

اگر

$$x(t) \overset{\vartheta s}{\leftrightarrow} a_k$$

آنگاه

$$x(-t) \overset{\vartheta s}{\leftrightarrow} a_{-k}$$

به عبارت دیگر وارونگی زمانی یک سیگنال پیوسته در زمان به وارونگی رشته ی ضرایب سری فوریه آن
منجر می شود. یکی از نتایج جالب خاصیت وارونگی زمانی این است که اگر x(t) یعنی اگر x(-t)= x(t)
زوج باشد ضرایب سری فوریه ی آن نیز زوج اند، یعنی $a_k = a_{-k}$. به نحوی مشابه اگر x(t)، x(t)
یعنی x(-t)= -x(t) ضرایب سری فوریه ی آن نیز فردند، یعنی $a_{-k} = -a_k$. فرد باشد،

۹- «الف» فصل سوم، صفحه ۱۸۶

اگر

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}s}{\leftrightarrow} a_k$$

آنگاه

$$x(t-t_0) \overset{\mathfrak{F}s}{\leftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t_0} a_k$$

یک نتیجه ی خاصیت این است که اگر یک سیگنال متناوب جا به جا شود، اندازه ی ضرایب سری فوریه ی آن تغییر نمی کنند. یعنی $|a_k| = |b_k|$.

۱۰- «ج» فصل سوم، صفحه ۱۹۴

نمایش سری فوریه ی سیگنال متناوب گسسته در زمان یک سری متناهی است، حال آن که نمایش سری **فوریه ی سیگنال گسسته در زمان متناوب یک سری نامتناهی است.**

۱۱- «د» فصل چهارم، صفحه ۳۰۶

از خاصیت مشتق گیری فرکانسی بدست می آوریم:

$$\mathfrak{f}\{te^{-|t|}\} = j\frac{d}{d\omega}\mathfrak{f}\{e^{-|t|}\} = j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{2}{1+\omega^2}\right] = \frac{-4j\omega}{[1+\omega^2]^2}$$

۱۲- «ب» فصل چهارم، صفحه ۲۷۵

جابجایی زمانی:

اگر

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\leftrightarrow} x(j\omega)$$

آنگاه

$$x(t-t_0) \overset{\mathfrak{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_0} x(j\omega)$$

۱۳- «ب» فصل چهارم، صفحه ۲۸۰

تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی:

اگر

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\leftrightarrow} x(j\omega)$$

آنگاه

$$x(at) \overset{\mathfrak{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$$

۱۴- «د» فصل چهارم، صفحه ۳۰۵

$t - t_0$

ابتدا خاصیت انتقال زمانی را به کار می گیریم:

$$f\{x(t-1)\} = e^{-j\omega\times 1} f\{x(t)\} = e^{-j\omega} X(j\omega)$$

$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

در این صورت با توجه به خاصیت مشتق گیری زمانی، می توان نوشت:

مشتق اول

$$f\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t-1)\right\} = f\left\{\frac{d}{dt}[x(t-1)]\right\} = j\omega f\left\{\frac{d}{dt}x(t-1)\right\}$$

$\frac{d}{dt}x(t) = j\omega X(j\omega)$

مشتق دوم

$$= (j\omega)(j\omega) f\{x(t-1)\} = -\omega^2 e^{-j\omega} X(j\omega)$$

$j^2 = -1$

۱۵- «ب» فصل پنجم، صفحه ۳۲۸

تبدیل فوریه ی گسسته در زمان شباهت های بسیاری با تبدیل فوریه پیوسته در زمان دارد. تفاوت های عمده ی این دو تبدیل متناوب بودن تبدیل گسسته در زمان ($X(e^{j\omega})$) و محدود بودن فاصله ی انتگرال گیری در معادله ی ترکیب است. این دو تفاوت ناشی از واقعیت است که تا کنون چندین با آن را بیان کرده ایم: سیگنال های نمایی مختلط گسسته در زمانی که در تفاوت فرکانس هایشان مضرب صحیحی از 2π، با هم یکسان اند. **تبدیل فوریه سیگنال گسسته در زمان یک سیگنال پیوسته است.**

۱۶- «الف» فصل پنجم، صفحه ۳۶۳

$x[-n] = X(e^{-j\omega})$

ابتدا از خاصیت وارونگی زمانی استفاده نموده و می نویسیم:

$$f\{x[-n]\} = X[e^{-j\omega}]$$

$x[n-n_0] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

در این صورت از ویژگی انتقال زمانی تبدیل فوریه می توان نوشت:

$$f\{x[1-n]\} = f\{x[-(n-1)]\} = e^{-j\omega} f\{x[-n]\} = e^{-j\omega} X[e^{-j\omega}] \qquad (I)$$

به همین ترتیب داریم:

$$f\{x[-1-n]\} = f\{x[-(n+1)]\} = e^{j\omega} f\{x[-n]\} = e^{j\omega} X[e^{-j\omega}] \qquad (II)$$

$ax[n]+by[n] = aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$

حال از ویژگی خطی بودن تبدیل فوریه و روابط I و II داریم:

$$X_1[e^{j\omega}] = f\{x_1[n]\} = f\{x[1-n] + x[-1-n]\} = f\{x[1-n]\} + f\{x[-1-n]\}$$

$$= e^{-j\omega} X[e^{-j\omega}] + e^{j\omega} X[e^{-j\omega}] = 2\left[\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right] X[e^{-j\omega}] = (2\cos\omega)[e^{-j\omega}]$$

۱۷- «الف» فصل پنجم، صفحه ۳۶۰

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

پاسخ فرکانسی این سیستم عبارت است از:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

بنابراین پاسخ ضربه سیستم برابر است با:

$$h[n] = a^n u[n]$$

۱۸- «ب» فصل نهم، صفحه ۵۹۳

$x(t) = e^{-at}u(t)$

می دانیم که تبدیل فوریه $x(j\omega)$ به ازای $a>0$ همگرا و به صورت زیر است:

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega + a}, \quad a>0$$

$s = \sigma + j\omega$ $\quad x(t)e^{-st}dt$

تبدیل لاپلاس عبارت است از:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}u(t)dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

به ازای هر $s = \sigma + j\omega$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t}dt$$

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega}, \quad \sigma + a > 1$$

و چون $s = \sigma + j\omega$ و $\sigma = Re\{s\}$

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, Re\{s\} > -a$$

یعنی

$$\mathbf{e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} > -a}$$

۱۹- «الف» فصل نهم، صفحه ۵۹۵

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(-t)$$

$\frac{1}{s+a} \Rightarrow \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}$

$$-e^{-t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+1},$$

$s = \sigma + j\omega$

$$s+1<0 \quad \Rightarrow \mathbf{Re\{s\} < -1}$$

$\frac{1}{\sigma + a + j\omega}$

نکته : به دلیل $u(-t)$: $s+1<0$

$s<-1$

$-2 \quad -1 \quad 0$

$$e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+2}$$

$$s+2>0 \quad \Rightarrow, \mathbf{Re\{s\} > -2}$$

$s>-2$ $\quad -2<s<-1$

نکته : به دلیل $u(t)$: $s+2>0$

۲۰- «الف» فصل نهم، صفحه ۵۹۹

خاصیت ۱: ROC در صفحه ی s از نوارهایی موازی با محور $j\omega$ تشکیل می شود.

خاصیت ۲: ROC تبدیل لاپلاس های گویا هیچ قطبی را شامل نمی شود.

خاصیت ۳: اگر $x(t)$ عمر محدود داشته و مطلقا انتگرال پذیر باشد، **ROC تمام صفحه ی s است.**

۲۱- «د» فصل دهم، صفحه ۶۷۳

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]\right\} z^{-n}$$

$$= 7\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]z^{-n} - 6\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]z^{-n}$$

$$= 7\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6\sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

$$= 7\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n - 6\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}^{-1} z\right)^n$$

برای همگرایی $X(z)$ هر دو جمع معادله باید همگرا باشد یعنی $\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1$ و $\left|\frac{1}{2}^{-1} z\right| < 1$ یا

$|z| > \frac{1}{3}$ و $|z| < \frac{1}{2}$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}^{-1} z}, \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

۲۲- «د» فصل دهم، صفحه ۶۷۵ تا ۶۷۸

خاصیت ۱: ناحیه ی همگرایی $X(z)$، حلقه ای از صفحه z به مرکز مبدأ است.

خاصیت ۲: هیچ قطبی در ROC قرار نمی گیرد.

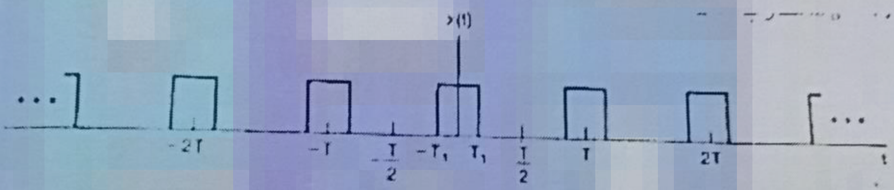
خاصیت ۳: اگر $x[n]$ طول محدودی داشته باشد، ROC تمام صفحه z، **به جز احتمالا $z=0$ و یا $z=\infty$** است.

سیگنال‌ها و سیستم‌ها	پاسخنامه تشریحی	نیمسال اول ۹۷-۱۳۹۶

۱- فصل سوم، صفحه ۱۷۸

موج چهار گوش در یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$



این سیگنال با دوره تناوب T و فرکانس پایه ی $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ متناوب است.

به خاطر تقارن x(t) حول t=0 بهتر است فاصله ی انتگرال گیری را $-T/2 \leq t < T/2$ برگزینیم، البته هر فاصله به طول T نیز برای این کار مجاز است و نتیجه ای واحدی به دست می دهد. با استفاده از این فاصله و گذاشتن این حدود انتگرال گیری در معادلات زیر به ازای k=0 به دست می آوریم:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T} \qquad = \frac{t}{T}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{T}(T_1+T_1) = \frac{2T_1}{T}$$

a_0 مقدار متوسط x(t) است، که در این حالت برابر است با کسری از دوره ی تناوب که در آن x(t)=1.

برای $k \neq 0$ به دست می آوریم:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}\,dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right]$$

با توجه به این که جمله ی داخل کروشه $\sin k\omega_0 T_1$ است، ضرایب a_k را می توان به صورت زیر نوشت:

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \qquad k \neq 0$$

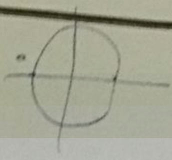
به ازای $T=4T_1$، x(t) یک موج چهارگوش است که نصف تناوب ۱ و نصف تناوب ۰ است. در این حالت $\omega_0 T_1 = \frac{\pi}{2}$، از اینرو:

$$a_k = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{k\pi}, \qquad k \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)}{3\pi} \rightarrow \sin(2\pi)$

$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{1}}$



به ازای k های زوج و غیر صفر $a_k=0$. همچنین $\sin(\frac{\pi k}{2})$ به ازای مقادیر فرد k متناوباً ۱+ و ۱- می شود.

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_3 = a_{-3} = -\frac{1}{3\pi}$$

$$a_5 = a_{-5} = \frac{1}{5\pi}$$

۲- تشریحی

فصل چهارم، صفحه ۲۷۹

$$g(t) = \delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} G(j\omega) = 1$$

توجه کنید که

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\delta\tau$$

با گرفتن تبدیل فوریه ی دو طرف به دست می آوریم:

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} = \pi G(0)\delta(\omega)$$

چون $G(j\omega)=1$، نتیجه می گیریم که:

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \pi\delta(\omega)$$

توجه کنید که با اعمال مشتق گیری می توان تبدیل فوریه ی ضربه را بازیافت. یعنی:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\omega\left[\frac{1}{j\omega} = \pi\delta(\omega)\right] = 1$$

در رابطه آخر از این حقیقت سود جسته ایم که $\omega\delta(\omega) = 0$.

۳- تشریحی

فصل پنجم، صفحه ۳۶۰

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

پاسخ فرکانسی این سیستم عبارت است از:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

سیگنال‌ها و سیستم‌ها	پاسخنامه تشریحی	نیمسال اول ۹۷-۱۳۹۶

به عنوان اولین گام یافتن پاسخ ضربه، مخرج معادله ی بالا را تجزیه می کنیم:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{12}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$H(e^{jw})$ را می توان با استفاده از روش بسط به کسرهای جزئی بسط داد، نتیجه عبارت است از:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} - \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

عکس تبدیل فوریه هر یک از جملات معادله ی فوق را می توان به طور نظری نوشت به دست آورد:

$$h(n) = 4(\frac{1}{2})^n u[n] - 2(\frac{1}{4})^n u[n]$$

۴- تشریحی فصل نهم، صفحه ۶۰۷

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad Re\{s\} > -1$$

گام اول به دست آوردن عکس تبدیل لاپلاس بسط به کسرهای جزئی است:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$A = [(s+1)X(s)]_{|s=-1} = 1$$

$$B = [(s+2)X(s)]_{|s=-2} = -1$$

بنابراین بسط $X(s)$ به کسرهای جزئی چنین است:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

می دانیم که هر جمله ای به شکل $1/(1+a)$، بسته به این که ROC سمت راست قطب باشد یا سمت چپ، دو عکس تبدیل لاپلاس دارد. پس باید ROC مربوط به هر یک از جملات مرتبه اول معادله ی بالا را تعیین کنیم. چون ROC به صورت $Re\{s\} > -1$ داده شده است، ROC هر یک از جملات بسط به کسرهای جزئی معادله ی بالا در $Re\{s\} > -1$ قرار دارد. ROC را می توان تا سمت چپ یا راست قطب گسترش داد.

عکس تبدیل لاپلاس هر یک از جملات معادله ی بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad Re\{s\} > -1$$

$$e^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad Re\{s\} > -2$$

$$[e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad Re\{s\} > -1$$

۵- تشریحی فصل دهم، صفحه ۶۹۸

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad |z| > |a|$$

$$a^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad |z| > |a|$$